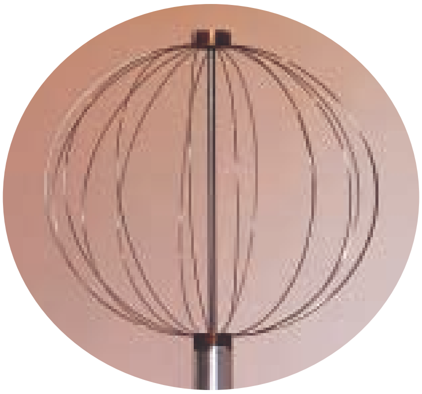


L’œuf et la sphère

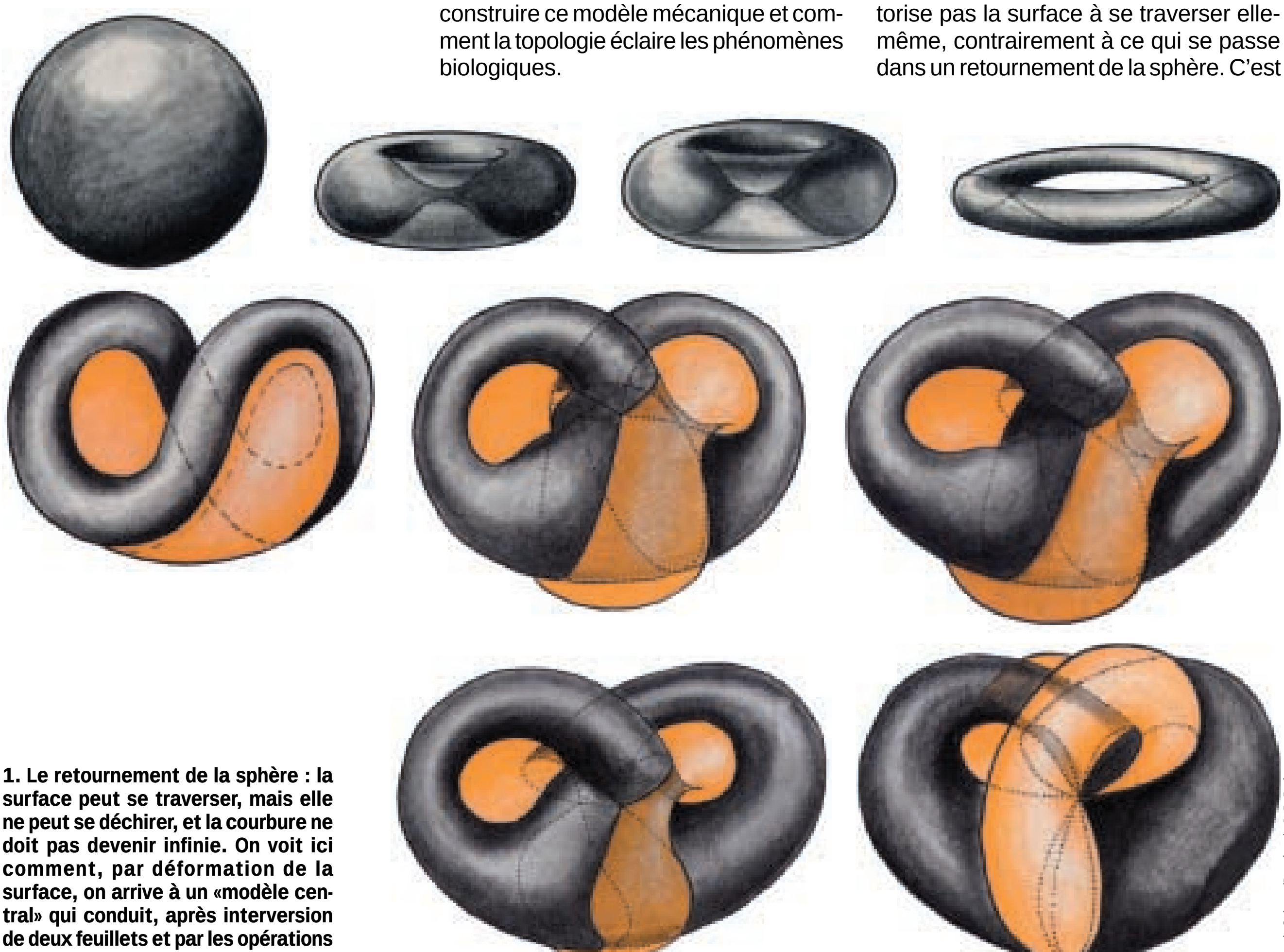
FRANÇOIS APÉRY

Un modèle mécanique des premières étapes de la formation de l’embryon constitue également un début de solution au problème mathématique de retournement de la sphère.

Au moment de la ponte, l’œuf de grenouille mesure moins de deux millimètres de diamètre. Après la fécondation, une division verticale forme deux cellules symétriques. La division suivante, qui est encore verticale, mais perpendiculaire à la précédente, produit quatre cellules en quartiers d’orange. Puis une division dans le plan équatorial engendre huit cellules. Progressivement l’œuf prend une allure de mûre, d’où le nom de morula *(voir la figure 3)*. À ce stade, la symétrie se perd, et les cellules s’écartent du centre pour former une sphère emplie de liquide, la blastula. Puis commence l’opération nommée gastrulation, qui conduit au futur estomac de l’être vivant.

Cette étape intéresse le mathématicien qui étudie l’opération «topologique» de retournement de la sphère. Dans ce retournement que nous détaillerons plus loin, on cherche à faire venir la face interne d’une sphère à l’extérieur, et *vice versa* ; on admet que la surface peut se traverser, mais les parties coupées doivent se recoller. Il est tout à fait surprenant qu’un système mécanique utilisé pour étudier le retournement de la sphère décrive aussi le phénomène de gastrulation. Nous verrons ici comment construire ce modèle mécanique et comment la topologie éclaire les phénomènes biologiques.

Contrairement à ce qu’aurait espéré l’amateur de simplicité, l’estomac n’est pas la cavité de la blastula : si la bouche et l’anus étaient seulement des trous dans la sphère de la blastula, le milieu intérieur s’échapperait, et il n’y aurait pas de distinction entre le milieu intérieur et le milieu extérieur. La gastrulation conduit à la formation simultanée de l’estomac et de l’orifice anal par une déformation géométrique sans déchirure ni création d’anse. Les mathématiciens nomment isotopie ce type de déformations continues qui conservent la topologie, c’est-à-dire la forme de l’objet considéré comme déformable. Notons que l’isotopie n’autorise pas la surface à se traverser elle-même, contrairement à ce qui se passe dans un retournement de la sphère. C’est



1. Le retournement de la sphère : la surface peut se traverser, mais elle ne peut se déchirer, et la courbure ne doit pas devenir infinie. On voit ici comment, par déformation de la surface, on arrive à un «modèle central» qui conduit, après interversion de deux feuillets et par les opérations inverses, à la sphère retournée.

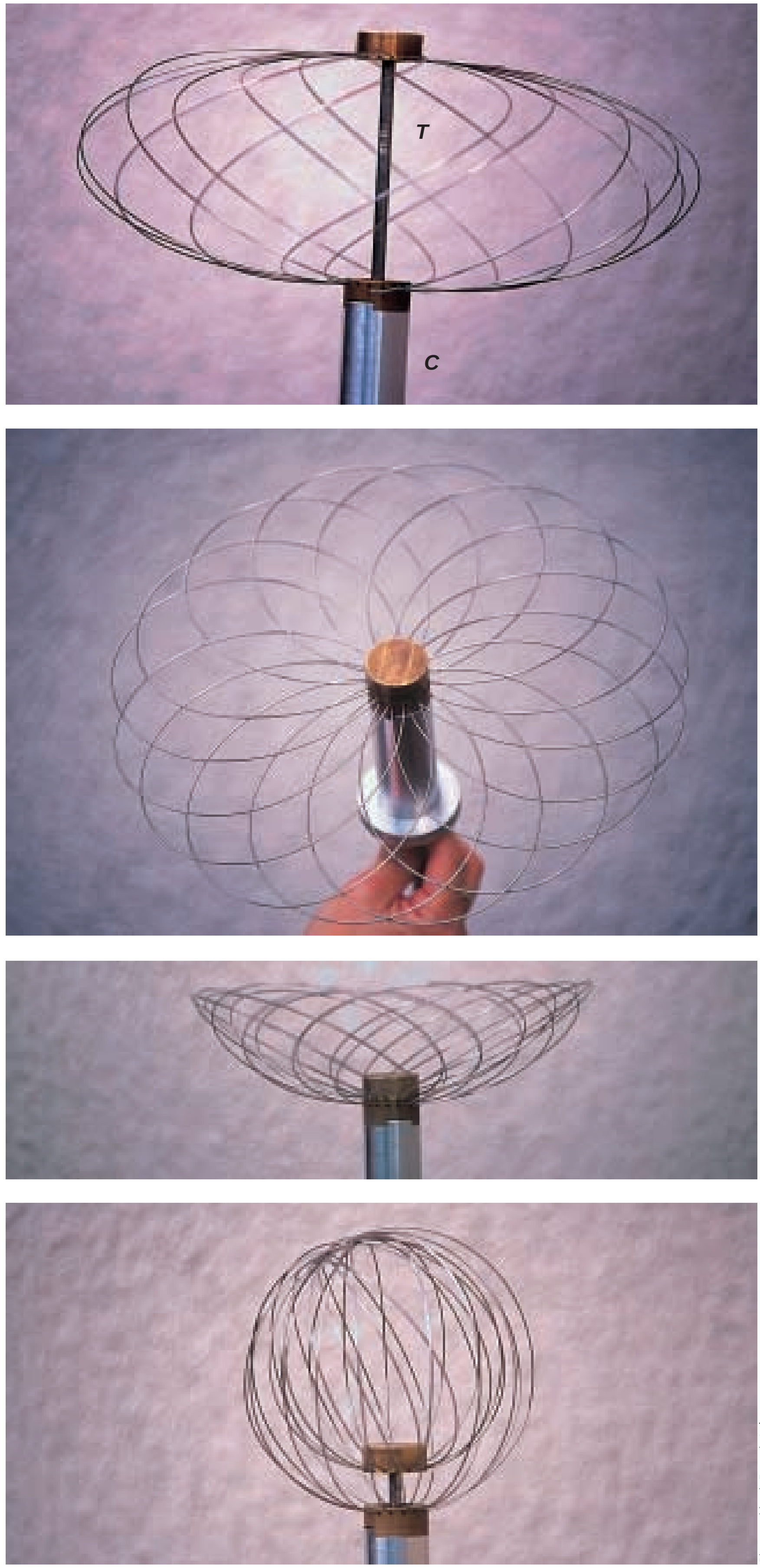
Pour la Science/Dessins de J.-P. Petit ce qui rend la gastrulation plus simple à décrire.

Le processus consiste à creuser la blastula comme si l'on poussait du doigt la surface d'un ballon dégonflé vers un point opposé : on obtient un bol dont le bord circulaire, en se contractant, forme l'anus et délimite le volume de l'estomac (l'orifice buccal se forme ultérieurement).

Pour mieux comprendre ce processus de gastrulation, réalisons un modèle mécanique qui, s'il ne prétend pas décrire la réalité dans sa complexité, sert au moins à modéliser sa partie géométrique. Prenons un fil d'acier résistant et élastique, d'une longueur de 40 centimètres environ et dont le diamètre est de l'ordre du millimètre. Son élasticité est importante : il doit reprendre sa forme initiale après déformation. On rapproche les deux extrémités : quand ces extrémités se touchent à angle droit pour former un demi huit, rien de particulier ne se passe. En revanche, quand on force les extrémités à s'aligner, le fil formant un cercle, ce dernier tend à se relever ou à s'abaisser brusquement *(voir la figure 4)*. Pourquoi ?

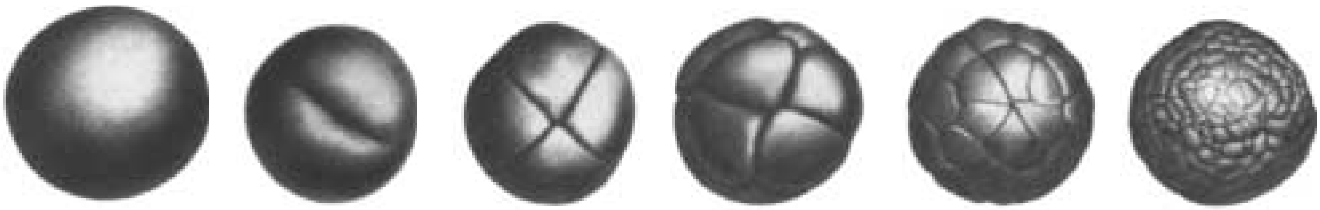
Précisons le phénomène en distinguant quatre objets géométriques : le plan de la boucle, le point *A* de la boucle où se touchent les deux extrémités du fil, la droite *D* du plan *P* tangente en *A* à la boucle rendue circulaire, le plan *Q* orthogonal à *D* en *A*. Chaque extrémité de la boucle définit une demi tangente. Lorsque ces deux extrémités sont parfaitement alignées au point A, les deux demi tangentes *D*+ et *D*– sont portées par *D*. Si, au lieu de maintenir cet alignement, nous faisons décrire à *D*+ et à *D*–, symétriquement par rapport au plan *Q*, deux cônes de sommet *A* et d'axe *D*, alors le plan *P* de la boucle effectue une rotation autour de *D* qui serait complète sans les bras de l'expérimentateur, lesquels limitent les mouvements. La rotation est d'autant plus vive que l'angle d'ouverture α des cônes est plus petit. C'est ainsi que, lorsque l'angle α entre *D*+ et *D*– est quasi plat, on observe le mouvement brusque indiqué précédemment. En effet, pour aller de la boucle en demi huit, où α est égal à 90 degrés, à la boucle circulaire, où α est égal à 180 degrés, il est difficile de maintenir *D*+ et *D*– dans un plan fixe ; la moindre oscillation, surtout quand α approche de 180 degrés, provoque la rotation de la boucle.

Le phénomène résulte de l'élasticité du fil : avec un fil d'étain, le fil ne bascule pas. L'élasticité du fil d'acier se mesure par un module d'autant plus grand que le fil reprend rapidement sa forme initiale après la disparition des contraintes. Depuis le mathématicien suisse Daniel Bernoulli (1700-1782), on définit l'énergie potentielle d'un fil élastique de longueur fixée



Photographies de François Apéry

2. La formation d'une sphère double à partir d'une sphère simple que l'on aplatit en faisant coulisser vers le haut le cylindre *C* sur la tige *T*.



3. La formation de la morula.

comme le produit du module d'élasticité par la moyenne du carré de la courbure (ou de l'écart entre la courbure sous contrainte et la courbure au repos, quand le fil n'est pas rectiligne, comme cela arrive quand il est fourni en bobine). Plus le fil est tordu ou courbé, plus sa courbure est grande, et plus grande est son énergie potentielle.

D'après le principe général de moindre action (qui, dans ce cas particulier, était déjà mis en équation par le mathématicien Leonhard Euler), le fil tend à minimiser son énergie potentielle, ce qui impose notamment à la boucle de rester dans un plan, qui est donc nécessairement le plan *P'*, défini par *D+* et *D–*, d'où la rotation de *P* pour se confondre avec *P'*. Sauf évidemment dans la situation idéale où *D+* et *D–* sont portées par *D*, auquel cas tous les plans contenant *D* font l'affaire, et aucune rotation de *P* n'est nécessaire.

Ces considérations nous ont fait un peu oublier la gastrulation. Revenons-y en construisant un modèle mécanique, fondé sur le mécanisme que nous venons de considérer. L'objet que nous construirons est une sphère rendue déformable par la flexibilité du fil d'acier, qui matérialise ses méridiens. Chaque méridien subira la déformation précédente *(voir l'encadré ci-dessous)*. La manipulation du modèle se décompose en deux mouvements : une translation du pôle Sud vers le pôle Nord, que l'on obtient en poussant le moyeu inférieur vers le moyeu supérieur, le long de la tige, au moyen de la poignée, et une rotation des deux moyeux l'un par rapport à l'autre, autour de l'axe de la tige.

La translation aplatit la sphère, en forçant les méridiens à se plier en leur milieu. L'énergie potentielle des fils et l'effort à fournir deviennent excessifs, et on risque de franchir la limite d'élasticité, au-delà de laquelle le métal se déformera irréversiblement. Cependant, toujours grâce au principe de moindre action, le fil minimise son énergie en se vrillant, imposant un mouvement de rotation au moyeu qui le tient : on s'en aperçoit en libérant la poignée et en se contentant de la pous-

La construction d'un modèle de gastrulation

Seize méridiens sont des fils d'acier de type corde à piano de 40 centimètres de long. J'ai obtenu de bons résultats avec un acier inoxydable au nickel-chrome de un millimètre de diamètre, et de grande résistance à la traction (environ 2 000 mégapascals). Un tel acier est utilisé en orthodontie sous le nom de jonc. Le fil est initialement courbé, si bien qu'il prend facilement la forme d'un demi cercle.

Deux moyeux en laiton forment les pôles du système. Chaque moyeu est un cylindre plein, de trois centimètres de diamètre, traversé dans son axe vertical par un trou de six millimètres de diamètre, et dont une des faces horizontales est fendue d'une mortaise de quatre millimètres de profondeur et de douze millimètres de largeur. D'autre part, 16 rayons horizontaux, régulièrement espacés, sont percés au diamètre de 1,1 millimètre, afin de recevoir les méridiens. La face du moyeu non fendue est percée au diamètre de 1,5 centimètre, à une profondeur suffisante pour faire apparaître les 16 orifices.

Une tige d'acier inoxydable de 35 centimètres de long et de 5,5 millimètres de diamètre, filetée à une extrémité, est soudée, à l'autre, à un tenon devant s'ajuster exactement dans la mortaise d'un moyeu.

Enfin la poignée de manipulation est composée de trois pièces : un disque d'aluminium de 5 centimètres de diamètre et de 8 millimètres d'épaisseur, percée en son centre d'un filetage qui recevra la tige filetée ; un écrou permettant de solidariser la tige et le disque ; un cylindre d'aluminium de 9 centimètres de long et de 3 centimètres de diamètre, dont une extrémité est munie d'un tenon qui s'ajuste à l'un des moyeux et l'autre est un disque identique au précédent. L'axe de ce cylindre est percé d'un trou de 6 millimètres qui laisse coulisser la tige. Il est pratique de canneler les deux disques d'aluminium sur la tranche pour faciliter la prise.

On commence par monter les méridiens sur un moyeu. Chaque fil d'acier est glissé dans l'un des orifices du moyeu jusqu'à ressortir franchement de l'autre côté. Avec un chalumeau, on fond l'extrémité qui est apparue par le centre du moyeu de façon à produire une petite boule qui empêchera le fil de ressortir. Une fois les 16 rayons montés sur le premier moyeu, on répète la même opération avec l'autre moyeu, de sorte que les mortaises des deux moyeux soient du côté extérieur à la sphère formée par les 16 méridiens. On glisse alors la tige à travers les deux moyeux en bloquant son tenon dans la mortaise d'un des moyeux. À l'autre extrémité, celle qui dépasse de la sphère, on enfile le cylindre d'aluminium dont le tenon vient s'adapter à la mortaise du second moyeu. Puis on visse le disque d'aluminium à l'extrémité de la tige et on bloque avec l'écrou. Le modèle ainsi construit se présente comme une sphère montée sur un pied et rappelle une pièce de batteur à œuf.

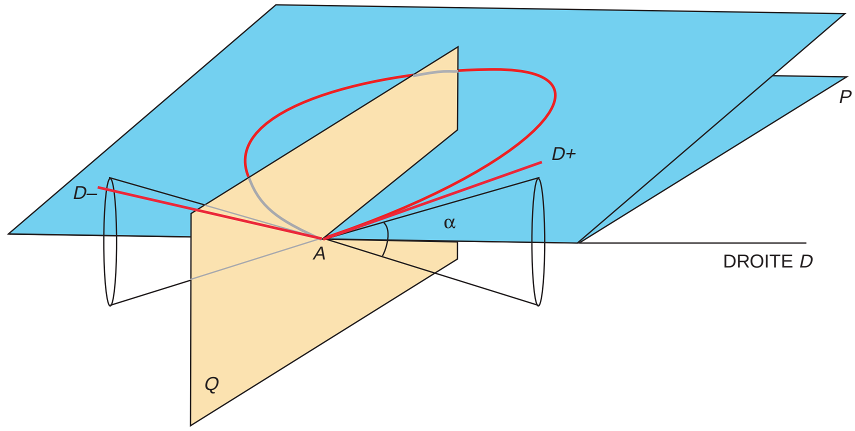
ser avec un doigt. La sphère s'aplatit alors d'elle-même sur un disque, chaque méridien prenant l'allure d'un demi huit horizontal, d'énergie très proche de celle du fil dépourvu de contraintes. C'est là que la libre rotation des méridiens sur les moyeux est cruciale. Sans elle, l'aplatissement serait impossible.

Au cours de cet aplatissement, le moyeu inférieur tourne de 90 degrés par rapport au moyeu supérieur. Puis, quand on impose, à l'aide de la poignée, une rotation supplémentaire de 90 degrés dans le même sens, un phénomène étonnant se produit : le disque se referme en une sphère deux fois plus petite que la sphère initiale. Soit le disque se referme sur la main du manipulateur, soit il se referme vers l'extérieur. Pour favoriser le second cas, il suffit, au moment où l'on impose la rotation supplémentaire, de pousser légèrement vers le haut le bord du disque formé par les méridiens aplatis.

La rotation totale de 180 degrés tend à donner à chaque méridien la forme d'un cercle, à ceci près que les deux extrémités ne sont pas exactement alignées puisqu'ils sont sur les deux moyeux décalés verticalement de l'épaisseur totale d'un moyeu. L'expérience montre que chaque méridien cherche une configuration plane, et celle-ci ne peut être que verticale, puisque le plan des orifices recevant les extrémités des méridiens est vertical. À partir du moment où une boucle entame son redressement, elle entraîne sa voisine dans le même mouvement et, de proche en proche, toutes suivent et viennent se bloquer dans la position verticale.

L'ensemble du mouvement qui part de la sphère engendrée par des demi-cercles méridiens jusqu'à la figure formée après translation et rotation relative de 180 degrés des moyeux décrit mécaniquement un modèle de gastrulation. En effet, la figure finale est une sphère deux fois revêtue, munie d'une ouverture à l'endroit où les méridiens s'entrecroisent. Chaque méridien décrit un cercle complet presque parfait, dont une moitié est un méridien de la sphère externe de la gastrula, et l'autre est un méridien de la sphère interne formant le système digestif.

Tout en maintenant l'angle de vissage de 180 degrés, on peut écarter légèrement les deux moyeux le long de la tige pour bien faire apparaître l'espace entre les deux sphères. Il suffit ensuite de dévisser un peu la poignée par rapport à la tige pour voir l'ouverture anale s'ouvrir et la gastrula régresser vers un bol. En continuant à dévisser et à écarter les deux pôles figurés par les moyeux, on retrouve la blastula.



4. Une boucle de fil bascule facilement quand l'angle α est petit.

Quel est l'intérêt d'un tel objet ? Il apparaît quand on considère la soudaineté de la fermeture et la création d'un espace enclos dans le réseau des fils d'acier. Ne pense-t-on pas à un piège et à une cage ? Imaginons que l'appareil soit maintenu dans la configuration du bol largement ouvert. Mettons un appât sur le sommet de la tige et attendons qu'un papillon rare se pose : on actionne le mécanisme, et l'insecte est emprisonné sans être blessé.

Notons que le même appareil pourrait être utilisé pour capturer des animaux marins. L'important est que le mécanisme de fermeture soit plus vif que l'animal et que le manche soit suffisamment long pour que la manipulation n'effraie pas la proie. D'autre part, si l'on dispose d'un long manche, on peut aussi utiliser le système pour attraper des fruits.

Le système a aussi des applications mathématiques, en raison de ses propriétés topologiques. Ce que l'on nomme le retournement de la sphère est une déformation qui permet de relier, par une famille continue de surfaces, une sphère dont l'intérieur est de couleur rouge et l'extérieur de couleur bleue, à la sphère retournée, rouge à l'extérieur et bleue à l'intérieur. Toute la question réside dans les règles imposées à la déformation : on ne doit jamais déchirer la surface et la courbure doit toujours rester limitée ; en revanche, la surface peut se traverser elle-même (voir *Le retournement de la sphère*, par Bernard Morin et Jean-Pierre Petit, *Pour la Science*, mai 1979).

Le modèle construit précédemment montre une manière de retourner la sphère : la gastrulation décrit un procédé pour passer d'une sphère à une sphère doublement revêtue (la gastrula). Au cours de cette déformation, le cercle équatorial de la sphère se contracte en un point et l'un des hémisphères (par exemple, l'hémisphère Nord) passe à l'intérieur de la sphère double, tandis que l'hémisphère Sud reste à l'extérieur. En échangeant les rôles des deux hémisphères et en effectuant une « dégastrulation », on obtient une sphère retournée.

Le problème n'est alors pas complètement résolu, car si l'étape qui va de la sphère initiale à la sphère double est mathématiquement admissible, ainsi que l'étape symétrique, qui commence juste après la sphère double pour arriver à la sphère retournée, le passage par la sphère double viole certaines règles : la courbure cesse d'être bornée au moment où le cercle équatorial se contracte en un point.

Dans ces conditions, pourquoi ne pas se contenter d'aplatir la sphère sur un disque double, comme on le fait avec le modèle mécanique avec une rotation de 90 degrés des moyeux ? On échangerait alors les deux faces du disque et l'on regonflerait la sphère retournée. Là encore, l'opération n'est pas admissible, car, lors de l'échange des faces, la courbure deviendrait infinie en tous les points du bord du disque double, qui formerait une arête de rebroussement.

Malgré l'insuffisance de l'opération de gastrulation, un argument géométrique plaide pour l'utilisation de cette opération afin de retourner la sphère : au cours d'un retournement, le plan tangent en un point doit effectuer un tour complet sur lui-même, ce qui ne se produit pas avec le passage par le disque double ; on imagine donc que, même en le perturbant un peu, on n'obtiendra pas un retournement acceptable. En revanche, on a vu que les deux moyeux (et les plans tangents correspondants) subissent une rotation relative de 180 degrés pendant la gastrulation, et donc une rotation d'un tour entier au cours du retournement complet. Voilà ce qui incite à chercher un retournement de la sphère acceptable au voisinage de la gastrulation... Mais cela est une autre histoire.

François APÉRY est topologiste à l'Université de Haute-Alsace (Mulhouse).